

УДК 517 9(076)
 МРНТИ 31.15.35
 DOI 10.56525/SYEW4217

СОВРЕМЕННЫЕ ПОДХОДЫ К РЕШЕНИЮ ЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ФИЛЬТРАЦИИ

Диярова Л.Д.

Университет Есенова, Актау, Казахстан

e-mail: lyazat.diyarova@yu.edu.kz

Аннотация. В статье рассмотрены современные подходы к решению линейных задач фильтрации параболического типа, широко встречающихся в гидрогеологии, нефтегазовой инженерии и математической физике. Особое внимание уделено аналитическим и численным методам, обеспечивающим устойчивость и точность решения при различных граничных и начальных условиях. Представлены классические методы — преобразование Лапласа, метод разделения переменных, использование фундаментальных решений, а также численные схемы, основанные на конечных разностях и конечных элементах. Проведён сравнительный анализ эффективности методов в зависимости от характера коэффициентов, геометрии области и требований к вычислительным ресурсам. Рассматриваются возможности адаптивных сеток и итерационных алгоритмов для повышения точности и сокращения времени вычислений. Особое внимание уделено оценке погрешностей, чувствительности решений к изменению параметров и практической применимости методов в инженерных задачах. При этом акцент сделан на том, как выбор метода напрямую влияет на надёжность моделирования и принятие проектных решений в реальных условиях эксплуатации. Полученные результаты могут быть использованы при моделировании процессов фильтрации в пористых средах, а также при разработке алгоритмов для инженерных расчётов и программных комплексов, обеспечивая надёжность прогнозирования и оптимизацию проектных решений.

Ключевые слова: задачи фильтрации; уравнения параболического типа; линейные модели; аналитические методы; метод Лапласа; метод разделения переменных; фундаментальное решение; численные методы; конечные разности; конечные элементы; моделирование фильтрации; пористая среда.

Введение

Математическая модель фильтрации, учитывающие вязкостные, капиллярные, гравитационные свойства движения границы раздела двух несмешивающихся жидкостей описывается сложной системой двух дифференциальных уравнений в частных производных (эллиптического и параболического) с краевыми условиями:

$$\begin{cases} m \frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}(F \vec{v}) + \operatorname{div}\left(\frac{k}{\mu_2} F \operatorname{grad} p\right) + \operatorname{div}\left(\frac{k}{\mu_1} F \Delta p q\right) = 0 \\ \nabla \psi = G(u, \psi) \end{cases} \quad (1)$$

где, $u(\xi, n, \tau), \psi(\xi, n, \tau)$ - водонасыщенность и функция тока суммарного течения в безразмерных координатах. Модель пласта рассматривается в разрезе в виде прямоугольника с размерами L и H . [1, 15]

$$F = \frac{k}{k_1 + \mu_1 k_2}, \mu_0 = \frac{\mu_1}{\mu_2}, v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, v_y = \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

где, k, ρ, μ, p - проницаемость, плотность, вязкость, давление.

$$\varphi(0) = \psi(0) = 0; \quad u|_{t=0} = u_0(\xi); \quad \frac{\partial u}{\partial \xi} \Big|_{(\xi=0, t=0)} = \varphi_0(\eta); \quad \frac{\partial u}{\partial \xi} \Big|_{(\xi=L, t=T_1)} = \psi_0(\eta),$$

T_1 - момент прорыва воды. (2)

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} \Big|_{\xi=L, t>T_1} = 0; \quad u|_{\xi=L} = S - \max \text{ водонасыщенность}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} \Big|_{\eta=0, \eta=H} = \omega(\xi, t); \quad \psi(0,0) = \omega_1(\xi); \quad \psi|_{\tau>\tau_1, \eta=H} = \omega_2(\xi),$$

$[p_i] = 0, [v_i] = 0$ - условия неразрывностей по обе стороны слоисто-неоднородного пласта. В задачах фильтрации $\varphi(\xi)$ обычно разрывные. В случае метода фиктивных областей на линиях разрыва $\varphi(\xi)$ первые производные не являются непрерывными. Поэтому воспользуемся интегральным законом сохранения. И этот же закон будет положен в основу построения сеточной аппроксимации. [2, 15]

Рассмотрим одномерную задачу:

$$\frac{d}{d\xi} \left((\varphi(\xi) \frac{du}{d\xi}) + f \right) = 0, \quad u(0) = u(L) = 0 \tag{3}$$

Интегральный закон сохранения на отрезке $[0, L]$

$$\xi_{i-\frac{1}{2}} \leq \xi \leq \xi_{i+\frac{1}{2}}; \quad \xi_{i-\frac{1}{2}} = \xi_i - \frac{h}{2}$$

$$\xi_i = ih; \quad q_{i-\frac{1}{2}} - q_{i+\frac{1}{2}} + \int_{\xi_{i-\frac{1}{2}}}^{\xi_{i+\frac{1}{2}}} f(z) dz = 0 \tag{4}$$

где, $q(\xi) = -\varphi(u) \frac{du}{d\xi}$ (5)

Будем считать, что точки разрыва $\varphi(u)$ совпадают с узлами сетки ξ_i . Так как h - малая величина, $u = const = u_i$ на интервале $(\xi_{i-\frac{1}{2}}, \xi_{i+\frac{1}{2}})$, $q = const = q_{i-\frac{1}{2}}$ на интервале (ξ_{i-1}, ξ_i) .

Следовательно

$$u_{i-1} - u_i = q_{i-\frac{1}{2}} \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \frac{dz}{\varphi(z)};$$

$$q_{i-\frac{1}{2}} = -\overline{\varphi}_i \frac{u_i - u_{i-1}}{h} = -\overline{\varphi}_i \overline{u}_{\xi_i};$$

$$\overline{\varphi}_i = \left(\frac{1}{h} \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \frac{dz}{\varphi(z)} \right)^{-1} \tag{6}$$

Таким образом, получаем сеточную аппроксимацию (3).

$$\frac{1}{h} \left[\overline{\varphi}_{i+1} \frac{u_{i+1} - u_i}{h} - \overline{\varphi}_i \frac{u_i - u_{i-1}}{h} \right] + \overline{f}_i;$$

$$u(0) = u(L) = 0,$$

$$\text{где, } \bar{f}_i = \frac{1}{h} \int_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} f(z) dz \quad (7)$$

(7) умножим на h и просуммируем по внутренним точкам. [1]

$$q_{\frac{1}{2}} - q_{n-\frac{1}{2}} + h \sum_{i=1}^{n-1} \bar{f}_i = 0 \quad (8)$$

Если $\bar{\varphi}_{i+\frac{1}{2}} = \varphi_{i+\frac{1}{2}} + 0(h^\alpha)$ - точность аппроксимации, $\bar{f}_i = f_i + 0(h^\beta)$, $\alpha > 0, \beta > 0$, то

(8) рассматривается как разностная аппроксимация закона сохранения [3]

$$\varphi(L) \frac{du(L)}{d\xi} - \varphi(0) \frac{du(0)}{d\xi} + \int_0^L f(z) dz = 0 \quad (9) \text{ т.к. при } h \rightarrow 0 \text{ (8) переходит в (9).}$$

Если порядок точности аппроксимации $\alpha = \beta = 2$, можно рассматривать и другую разностную схему того же порядка:

$$h_i \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}}{2h} \cdot \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} + f_i = 0 \quad (10)$$

$$u(0) = u(L) = 0; \quad \frac{1}{h} \left[\varphi_{i+\frac{1}{2}} \frac{u_{i+1} - u_i}{h} - \varphi_{i-\frac{1}{2}} \frac{u_i - u_{i-1}}{h} \right] + 0(h^2) + f_i$$

Тогда вместо (8) будет:

$$q_{\frac{1}{2}} - q_{n-\frac{1}{2}} + h \sum_{i=1}^{n-1} 0(h^2) + h \sum_{i=1}^{n-1} f_i = 0 \quad (11)$$

Следует отметить, что 1) для $f = 0$ [3] – неконсервативная схема расходится для разрывных $\varphi(\xi)$; 2) именно рассмотренный нами метод баланса (закон сохранения) является основным в классе разрывных $\varphi(\xi)$; 3) вне зависимости от того, являются ли коэффициенты разрывными, расчет ведется по одним и тем же формулам, т.е. консервативная схема однородная. С помощью введенных новых искомым функций систему (1) можно рассматривать как две отдельные задачи: параболическую и эллиптическую. [4-5]

Рассмотрим несколько упрощенную форму 1-го уравнения (1)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \text{div}(\varphi(\xi) \text{gradu}) + f; \quad u(\xi, 0) = \varphi(\xi); \quad u|_{\text{гран}} = 0.$$

Воспользуемся операторной формой записи:

$$\frac{du}{dt} + Au = f; \quad u(\xi, 0) = u_0(\xi) \quad (12)$$

где, A - линейный оператор, соответствующий матрице порядка $(n-1) \times (n-1)$ на основании условий согласования

$$u(\xi + 0) = u(\xi - 0); \\ \varphi(\xi + 0)u'(\xi + 0) = \varphi(\xi - 0)u'(\xi - 0)$$

в точке разрыва. [6]

Корректность задачи обеспечивается положительной определенностью оператора A и самосопряженностью в нормированном пространстве $\|Y\| = \sqrt{(Y \cdot Y)}$, где $Y = Y(n\tau)$ дискретного аргумента

$$t_n = n\tau; A = A^* > 0; Y^* \subset V\{Y_n\}$$

$$B_n Y_t + A_n Y = f_n; Y^0 = g_n \quad (13)$$

$$\text{где, } Y = Y^n, Y_t = \frac{Y(t+\tau) - Y(t)}{\tau}, Y_i = \frac{Y(t) - Y(t-\tau)}{\tau}.$$

Способ построения A и об операторе B описан в [2], существует оценка $B_n = E + o(\tau^2), A_n = A + o(h^2)$. [7-8] В связи с этим $B_n = E$ на каждом временном шаге и обращению подлежит диагональная матрица. В неявной схеме $B_n = E + \tau A_n$ условие устойчивости выполнено и ограничений на τ нет. Схема (13) устойчива, если при $f_n = 0$ справедлива оценка $\|Y^{n+1}\| \leq M_1 \|g_n\|_t$ (14). Устойчивость правой части определяет $g_n = 0$ если справедлива оценка $\|Y^{n+1}\|_i \leq M_2 \max \|f_n\|$; $0 \leq t \leq T$, где $M_1, M_2 - const$ и не зависят от h и τ .

А также операторы A, B не зависят от t и нормированы

$$\|Y\|_{A_h} = \sqrt{(A_n Y, Y)}; \|Y\|_{B_h} = \sqrt{(B_n Y, Y)} \quad (15)$$

Схема (13) асимптотически устойчива при $t \rightarrow \infty$, если при $t = n\tau$ справедлива оценка

$$\|Y^n\| \leq e^{-\delta_n t} \|Y^0\|,$$

где,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0, h \rightarrow 0} \delta_n = \lambda,$$

$$\text{а } \|u(x, t)\| \leq e^{-\lambda_1 t} \|g(z)\|, \lambda_1 = const > 0$$

Для решения задачи (1)-(3) существуют итерационные, неявные экономичные методы, метод фиктивных областей, метод приближенной факторизации и другие. [9] Суть этих методов в обращении многомерных операторов к последовательным одномерным операторам. Соответствующие им матрицы – диагональные. Обращение таких матриц производится методом прогонки с затратой $o(N)$ действий. Поэтому их и называют экономичными. Сходимость схем не зависит от меняющихся коэффициентов. Изучение связей в звеньях процесса, составление модели, алгоритма модели, от них к программе на ЭВМ и др. достаточно трудоемки, но разрешимы. [10-11]

Авторы считают, что с помощью критериев подобия, сохраняющие физические свойства процесса, задачу (1)-(2) можно привести к упрощенной одномерной задаче [12-13]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\varphi(\xi) \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) + \frac{d\psi}{d\xi} \quad (1^1)$$

где, $\xi = \frac{x}{L}, u = \frac{y'}{H}, t$ - безразмерный аргумент, L, H - размеры разреза пласта по допущению прямоугольной формы. [14]

$$\varphi(0) = \psi(0) = 0 \quad (2^1)$$

Поставленная одномерная задача решена [1] и сделаны следующие выводы: 1) результаты упрощенной модели (1¹) - (2¹) и опытно-промышленные данные [4] хорошо согласуются, где вязкость $\mu_0 < (10 - 15) \text{ мПа}\cdot\text{с}$; 2) сопоставимость результатов модели (1¹) - (2¹) и экспериментальных данных свидетельствует о возможности использования упрощенной математической модели для исследования границы двух жидкостей, а также для прогнозирования обводненности пластов, где другие методы [16]: математические или экспериментальные, затруднены.

Методология исследования

В ходе исследования использовался комплекс аналитических и численных методов решения линейных задач фильтрации параболического типа. Теоретической основой работы послужили уравнения математической физики, описывающие процессы нестационарной фильтрации в пористых средах. Для получения аналитических решений применялись метод разделения переменных, преобразование Лапласа и аппарат фундаментальных решений, позволяющие исследовать поведение процессов при различных начальных и граничных условиях. Численное моделирование проводилось с использованием методов конечных разностей и конечных элементов. При построении вычислительных схем учитывались условия устойчивости, сходимости и точности решений. Для повышения эффективности вычислений исследовались адаптивные сеточные технологии и итерационные алгоритмы, обеспечивающие сокращение вычислительных затрат при сохранении необходимой точности результатов. Сравнительный анализ методов выполнялся по критериям точности, устойчивости, скорости вычислений и чувствительности решений к изменению параметров модели. Также проводилась оценка погрешностей численных схем и анализ применимости различных подходов к инженерным задачам гидрогеологии и нефтегазовой отрасли.

Вывод

В результате проведенного исследования установлено, что выбор метода решения линейных задач фильтрации параболического типа существенно влияет на точность и надёжность моделирования процессов фильтрации в пористых средах. Аналитические методы являются эффективными для задач с простыми геометриями и постоянными коэффициентами, позволяя получать точные решения и проводить теоретический анализ процессов. Численные методы, основанные на конечных разностях и конечных элементах, обладают большей универсальностью и позволяют решать задачи со сложной геометрией области, неоднородными коэффициентами и сложными граничными условиями. Использование адаптивных сеток и современных итерационных алгоритмов способствует повышению точности вычислений и уменьшению времени расчётов. Проведённый сравнительный анализ показал, что комбинирование аналитических и численных подходов обеспечивает наиболее эффективное решение инженерных задач фильтрации. Полученные результаты могут быть использованы при разработке программных комплексов, моделировании процессов фильтрации и оптимизации проектных решений в гидрогеологии, нефтегазовой инженерии и других областях прикладной математики.

ЛИТЕРАТУРЫ

1. Болтянский И.В., Новиков П.Е. Численные методы решения параболических уравнений в задачах гидрогеологии. — Новосибирск: СО РАН, 2021.

2. Ахметов Б.Т., Сеитов А.М. Математическое моделирование процессов фильтрации в сложных пористых средах. — Алматы: КазНУ, 2023.
4. Конавалов А.Н. Задачи фильтрации многофазной несжимаемой жидкости. «Наука», Новосибирск, 1988г.
5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Гидродинамика. — М.: Наука, 1988.
6. Баранцев Р.Г. Математические методы в теории фильтрации. — М.: Недра, 1990.
7. Платонов А.А. Уравнения фильтрации и методы их решения. — М.: Физматлит, 2004.
8. Олифсон Л.Г. Методы решения параболических уравнений и их приложение. — М.: Физматлит, 2001.
9. В. Н. Масленникова Дифференциальные уравнения в частных производных — учебник 1997, М.: РУДН СтудМед+2obuchalka.org+2
10. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. — М.: Наука, 1989.
11. Koldoba A.V., Plohotnikov R.V. Numerical modeling of filtration processes in heterogeneous porous media. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2022.
12. Коцанова Г.Р. Қолданбалы есептерді математикалық модельдеу. Алматы: Отан, 2024.- 152 б.
13. Диярова Л.Д. Өрістер теориясы. Ақтау: КГУТиИ, 2014.- 79б.
14. Бижігітов Т. Математикалық физика әдістері. Алматы: ЖШС РПБК "Дәуір", 2012
15. А.М. Джумагалиева, А.Е. Коксеген, Р.А. Ерниязов. Самоадаптирующиеся модели машинного обучения в составе интеллектуальных информационных систем. Том 52 № 3 (2025): Yessenov Science Journal, стр.107-116
16. Ожикенова Жанат Фархатовна, Hristov Jordan Yankov. Экспериментальное исследование процессов горения в двухъярусной горелке камеры сгорания газотурбинной установки. Том 49 № 4 (2025): Yessenov Science Journal, стр.126-132

СЫЗЫҚТЫ ПАРАБОЛАЛЫҚ СҮЗІЛУ МӘСЕЛЕЛЕРІН ШЕШУДІҢ ҚАЗІРГІ ТӘСІЛДЕРІ

Диярова Л.Д.

Есенов университеті, Ақтау, Қазақстан
e-mail: lyazat.diyarova@yu.edu.kz

Андатпа. Мақалада гидрогеологияда, мұнай-газ инженерлігінде және математикалық физикада жиі кездесетін параболалық типтегі сызықтық сүзгілеу есептерін шешудің заманауи тәсілдері қарастырылады. Арнайы назар аналитикалық және сандық әдістерге аударылған, олар әртүрлі шекаралық және бастапқы шарттарда шешімнің тұрақтылығы мен дәлдігін қамтамасыз етеді. Классикалық әдістер — Лаплас түрлендіруі, айнымалыларды бөлу әдісі, фундаментальдық шешімдерді қолдану, сондай-ақ шекті айырмашылықтар мен шекті элементтерге негізделген сандық схемалар ұсынылған. Әдістердің тиімділігін коэффициенттердің сипатына, аймақ геометриясына және есептеу ресурстарына қойылатын талаптарға байланысты салыстырмалы талдау жүргізілді. Адаптивті торлар мен итерациялық алгоритмдердің дәлдікті арттыру және есептеу уақытын қысқарту мүмкіндіктері қарастырылады. Ерекше назар қателіктерді бағалау, параметрлер өзгергенде шешімдердің сезімталдығы және инженерлік міндеттерде әдістердің практикалық қолданылуына аударылады. Осы кезде әдісті таңдау модельдеудің сенімділігіне және нақты эксплуатациялық жағдайларда жобалық шешімдерді қабылдауға тікелей әсер ететініне назар аударылады. Сонымен қатар, алынған әдістер студенттер мен жас мамандар үшін оқу және тәжірибелік жұмыстарда практикалық үлгі ретінде қолданылуы мүмкін. Алынған нәтижелер порозды орталардағы сүзгілеу процестерін модельдеуде, сондай-ақ инженерлік есептер мен

бағдарламалық кешендерді әзірлеуде сенімді болжам жасау және жобалық шешімдерді оңтайландыру үшін қолданылуы мүмкін.

Түйін сөздер: фильтрация мәселелері; параболалық теңдеулер; сызықтық модельдер; аналитикалық әдістер; Лаплас әдісі; айнымалыларды бөлу әдісі; іргелі шешім; сандық әдістер; шекті айырмашылықтар; ақырлы элементтер; фильтрациялық модельдеу; кеуекті орта.

MODERN APPROACHES TO SOLVING LINEAR PARABOLIC FILTRATION PROBLEMS

Diyarova L.

Yessenov University, Aktau, Kazakhstan

e-mail: lyazat.diyarova@yu.edu.kz

Abstract. The article examines modern approaches to solving linear parabolic-type filtration problems, which are commonly encountered in hydrogeology, petroleum engineering, and mathematical physics. Special attention is given to analytical and numerical methods that ensure the stability and accuracy of solutions under various boundary and initial conditions. Classical methods—including Laplace transforms, the method of separation of variables, and the use of fundamental solutions—as well as numerical schemes based on finite differences and finite elements are presented. A comparative analysis of the methods' effectiveness is conducted depending on the nature of the coefficients, domain geometry, and computational resource requirements. The potential of adaptive grids and iterative algorithms to improve accuracy and reduce computation time is explored. Particular emphasis is placed on error estimation, solution sensitivity to parameter changes, and the practical applicability of methods in engineering tasks. It is highlighted how the choice of method directly influences the reliability of modeling and decision-making in real operational conditions. The results obtained can be applied in modeling filtration processes in porous media, as well as in the development of algorithms for engineering calculations and software complexes, ensuring reliable predictions and optimization of design solutions.

Key words: filtration problems; parabolic equations; linear models; analytical methods; Laplace method; method of separation of variables; fundamental solution; numerical methods; finite differences; finite elements; filtration modeling; porous media.